15/11/2016

Μάθημα 13ο
Πιθανότητες

Κατανομή Poisson (~ 1837)

Κατανομή Poisson ως το όριο της Διωνυμικής Κατανομής

Πρόταση
Έστω η τ.μ. X με διωνυμική κατανομή $B(n, p_n)$ τέτοια ώστε για $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ και $\lim_{n\to\infty}(n \cdot p_n) = \lambda > 0$. Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} p_X(x) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\binom{n}{x}(p_n)^x (1-p_n)^{n-x}}_{\text{Διωνυμικές Πιθανότητες}} = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,\dots$$

Απόδειξη: Στηρίζεται στο $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$

Παρατήρηση:
ⓐ Η ποσότητα $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\dots$, είναι μη αρνητική.

ⓑ $\sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\lambda^x}{x!} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1.$

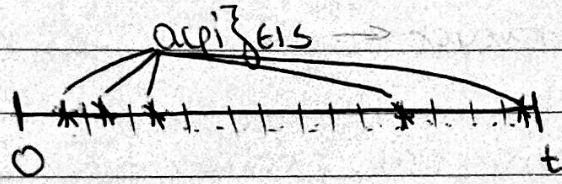
Ορισμός

Η τ.μ. X λέγεται Poisson με παράμετρο $\lambda > 0$ αν η συνάρτηση πιθανότητάς της είναι:

$$p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Συμβολισμός: $X \sim P(\lambda)$

Διαδικασία Poisson



Ενδιαφέρει το πλήθος των αφίξεων, ας το συμβολίσουμε με $X(t)$ στο διάστημα $(0,t)$

Το $X(t)$ είναι μια τ.μ. με τιμές τους φυσικούς αριθμούς $x = 0, 1, 2, \dots$

Αποδεικνύεται, κάτω από κάποιες προϋποθέσεις, ότι:

$$p_{X(t)}(x) = P(X(t) = x) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$$

Παρατηρήσεις

(a) Φυσική ερμηνεία της παραμέτρου λ

Το $\lambda > 0$ εκφράζει το ρυθμό των αφίξεων στη μονάδα του χρόνου.

(b) Αν το t είναι η μονάδα του χρόνου ($t=1$) τότε η $X(t)$ συμβολίζεται με X και $p_{X(t)}(x) = p_X(x) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, \dots$

Παραδείγματα

Ρυθμός κλήσεων τηλεφωνικής εταιρείας είναι 30 κλήσεις ανά ώρα.

(α) $P\left(\begin{array}{l}\text{καμίας κλήσης} \\ \text{σε διάστημα 3 min}\end{array}\right) = I$

(β) $P\left(\begin{array}{l}\text{περισσοτέρων από 5 κλήσεων} \\ \text{σε διάστημα 5 min}\end{array}\right) = II$

αφίξεις = κλήσεις

(α) Έστω μονάδα χρόνου τα 3 min.

Έστω X το πλήθος των κλήσεων στα 3 min.

Το $X \sim P(\lambda)$, $\lambda = ;$

1h = 60 min   30 κλ.

3 min $\lambda = ;$

$$\lambda = \frac{3 * 30}{60} = 1{,}5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 1{,}5}$$

Άρα: $X = P(1{,}5)$, $p_X(x) = \frac{e^{-1,5} \cdot (1{,}5)^x}{x!}$, $x = 0,1,2,\dots$

Άρα: $I = P(X=0) = p_X(0) = \frac{e^{-1,5}\,(1{,}5)^0}{0!} = e^{-1,5}$

(β) Έστω μονάδα χρόνου τα 5 min

Έστω X τ/μ. που παριστά πλήθος αφίξεων στα 5 min.

$X \sim P(\lambda)$, $\lambda = ;$

$$\left.\begin{array}{ll} 60 \text{ min} & 30 \text{ κλήσεις} \\ 5 \text{ min} & \lambda = ; \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{5 \times 30}{60} = 2{,}5 \Rightarrow \boxed{\lambda = 2{,}5}$$

Άρα: $X \sim P(\lambda = 2{,}5)$, $p_X(x) = \dfrac{e^{-2{,}5}\,(2{,}5)^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

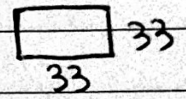
Άρα: $\text{II} = P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4) =$

$$= 1 - \sum_{x=0}^{4} p_X(x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} \frac{e^{-2{,}5} \cdot (2{,}5)^x}{x!} = \ldots$$

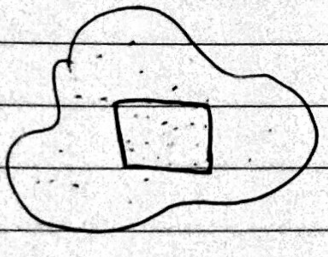
Παράδειγμα

100 δέντρα ανά στρέμμα (1 στρέμμα $\simeq$ 1000 m^2)

(α) P(Σε περιοχή 50 m^2 να υπάρχουν λιγότερα από 8 δέντρα)



(β) P(Σε περιοχή 50 m^2 να υπάρχουν μεταξύ 3 και 5 δέντρων)



Έστω μονάδα επιφάνειας τα 50 m^2

Έστω X η τ.μ. που παριστά το πλήθος των δέντρων στα 50 m^2

$X \sim P(\lambda = ;)$

$$\left.\begin{array}{ll} 1000 \, m^2 & 100 \text{ δέντρα} \\ 50 \, m^2 & \lambda = ; \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{50 \times 100}{1000} \Rightarrow \boxed{\lambda = 5}$$

Άρα: $X \sim P(\lambda = 5)$, $p_X(x) = \dfrac{e^{-5} \cdot 5^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$

(a) $P(X < 8) = \sum_{x=0}^{7} p_X(x) = \sum_{x=0}^{7} \frac{e^5 5^x}{x!} = \ldots$

(b) $P(3 \leq X \leq 5) = \sum_{x=3,4,5} p_X(x) = \sum_{x=3,4,5} \frac{e^5 \cdot 5^x}{x!} = \ldots$